

PROGRAM LINEAR



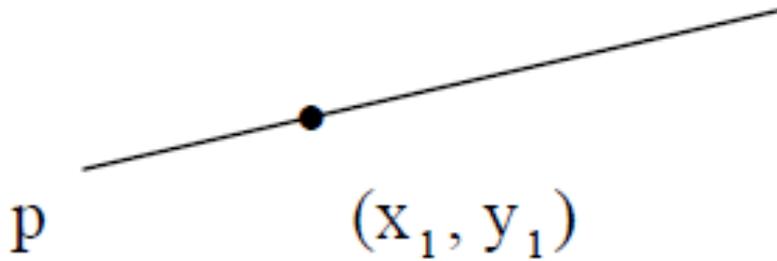
Pengertian

- *Program linier* adalah suatu cara penyelesaian masalah dengan menggunakan konsep pertidaksamaan linear.
- Dalam penyelesaian persoalan program linear adalah pemahaman dalam pembuatan grafik pertidaksamaan linear yaitu penentuan daerah himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan linear.
- Yang perlu diingat dalam pembuatan grafik pertidaksamaan linear ini yaitu mengenai persamaan garis.

Persamaan Garis

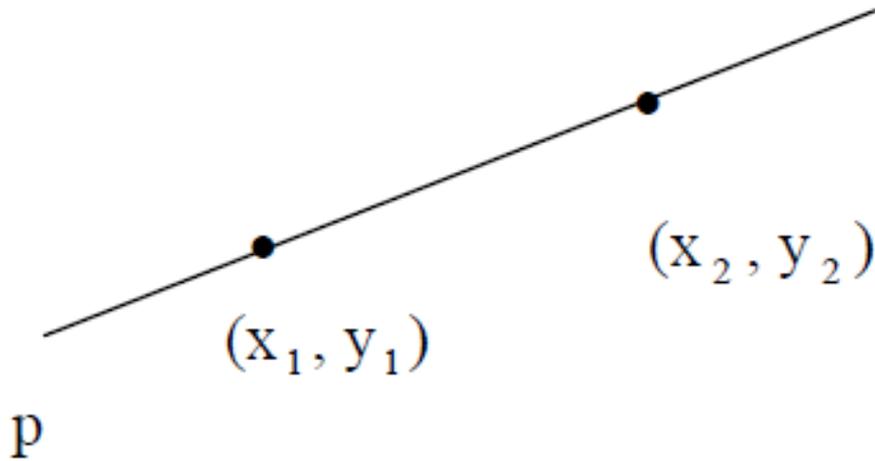
1. Persamaan garis melalui suatu titik (x_1, y_1) dengan gradien m adalah:

$$(y - y_1) = m (x - x_1)$$



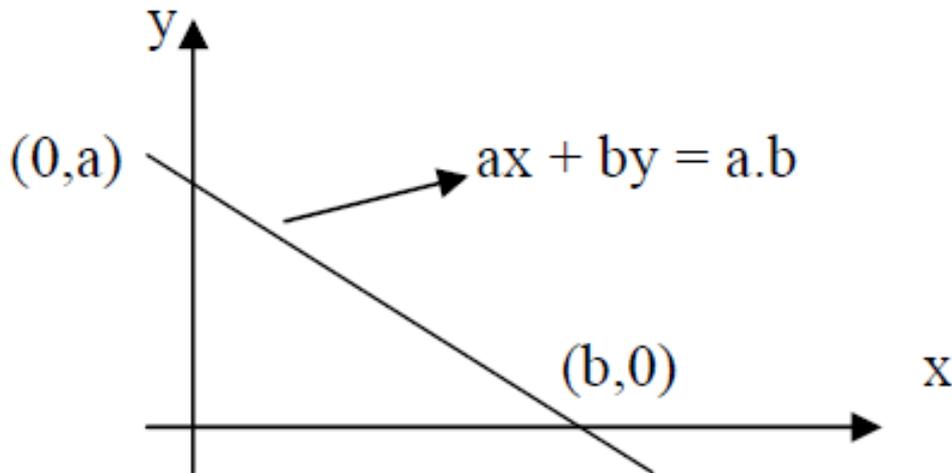
2. Persamaan garis melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



3. Persamaan garis lurus yang memotong sumbu x ($y=0$) di titik $(b,0)$ dan memotong sumbu y ($x=0$) di titik $(0, a)$ adalah:

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax + by = a.b$$



- Bukti : $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax + by = a.b$

- Dengan menggunakan persamaan 2 di atas:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- Persamaan garis melalui $(b,0) \rightarrow (x_1, y_1)$ dan $(0, a) \rightarrow (x_2, y_2)$, diperoleh:

$$\frac{y - 0}{a - 0} = \frac{x - b}{0 - b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{a} = \frac{x-b}{-b}$$

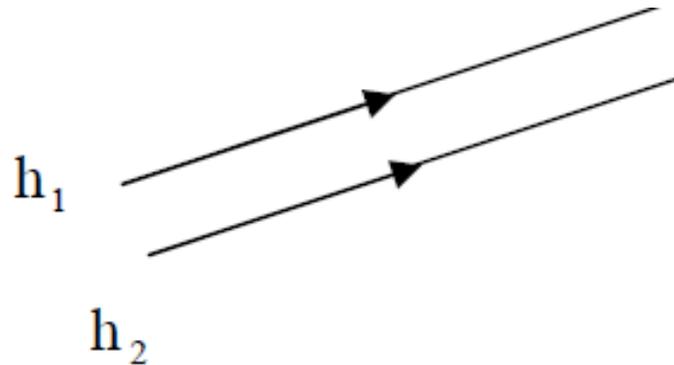
$$\Leftrightarrow -by = a(x-b)$$

$$\Leftrightarrow -by = ax - ab$$

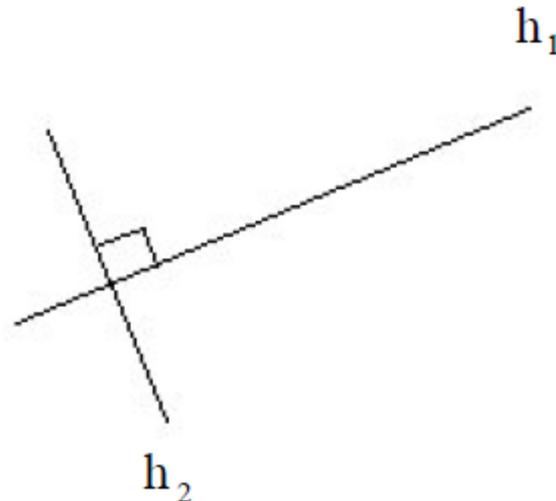
$$\Leftrightarrow ab = ax + by$$

$$\Leftrightarrow ax + by = ab \rightarrow \text{terbukti}$$

4. Dua gradien sama apabila dua garis saling sejajar \rightarrow
 $m_1 = m_2$

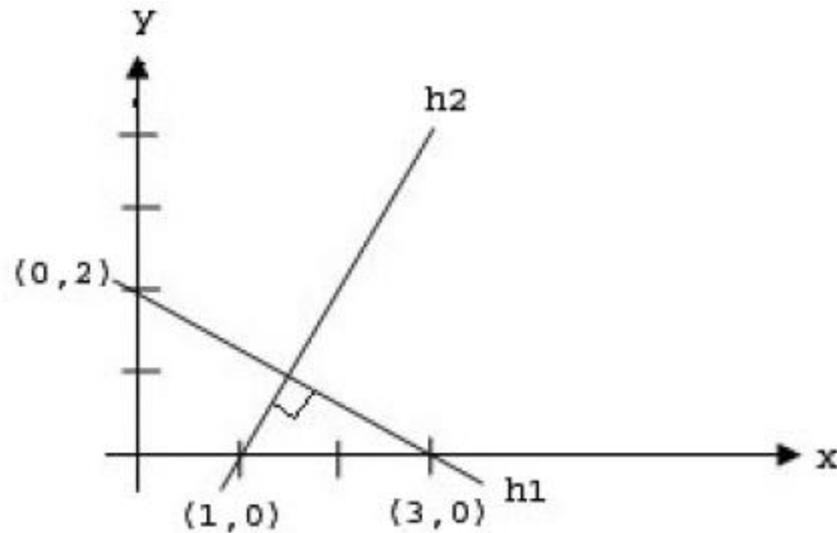


5. Hasil perkalian dua gradien adalah -1 apabila dua garis saling tegak lurus $\rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$



- Contoh:

Tentukan persamaan garis dari gambar di bawah ini :



garis h_1 melalui $(3,0)$ dan $(0,2)$;

garis $h_1 \perp h_2$ dan melalui $(1,0)$

1. persamaan garis h1 → menggunakan rumus :

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \quad | \times 6 |$$

$$\text{persamaan garis h1} \Rightarrow 2x + 3y = 6$$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

2. persamaan garis h2: $h1 \perp h2$ sehingga $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$m_1 = -\frac{2}{3} \quad \text{maka} \quad m_2 = \frac{3}{2}$$

melalui (1,0)

$$(y - y_1) = m_2 (x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{3}{2} (x - 1)$$

$$y = \frac{3}{2} (x - 1)$$

$$2y = 3x - 3$$

persamaan garis h2 adalah $3x - 2y = 3$

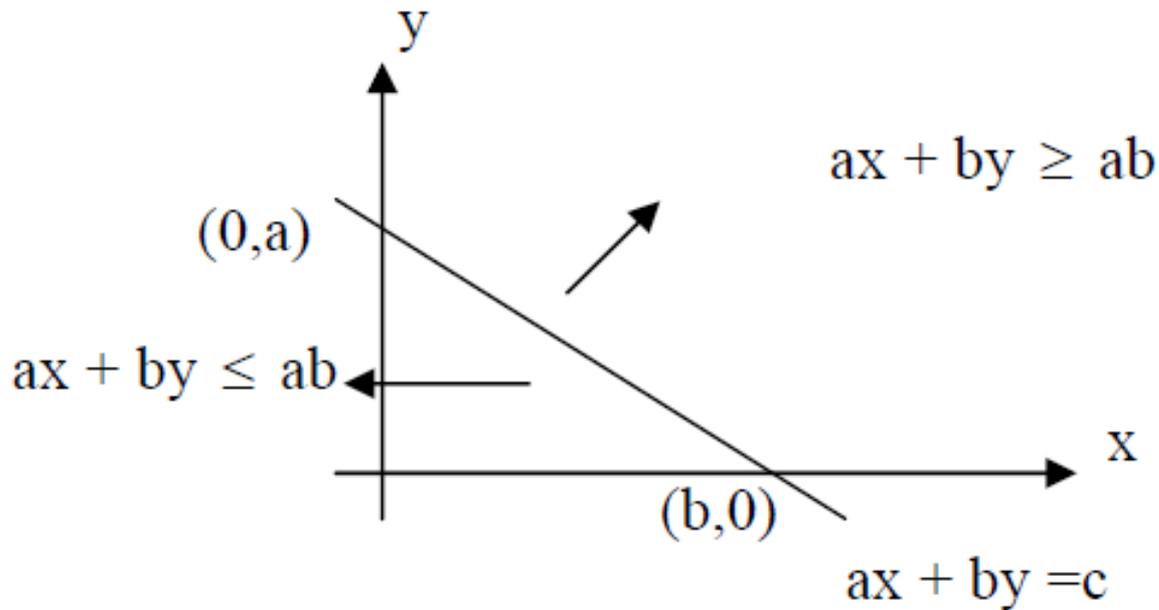
Menentukan Sistem Pertidaksamaan Linear:

- Untuk menentukan daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dapat dilakukan dengan menggunakan metoda grafik dan uji titik.
- Langkah-langkahnya ($ax + by \geq c$) yaitu :
 1. Gambar garis $ax + by = c$
 2. Lakukan uji titik dengan menentukan titik sembarang (x,y) yang terletak di luar garis $ax + by = c$, kemudian substitusikan ke dalam persamaan $ax + by \geq c$.

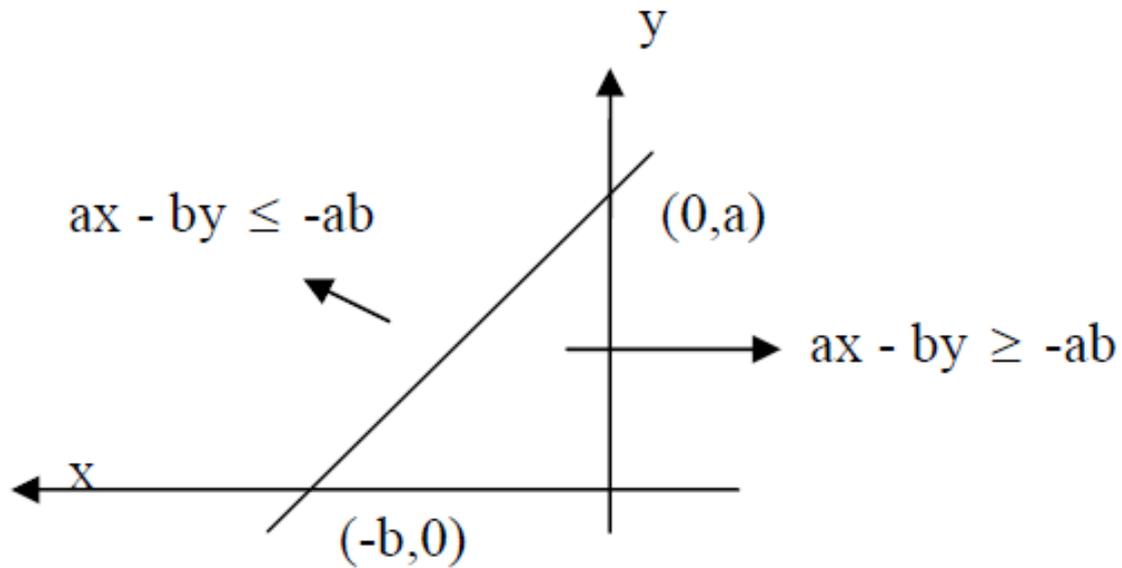
- a. Jika benar, maka himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik tersebut dengan batas garis $ax + by = c$
- b. Jika salah, titik tersebut bukan himpunan penyelesaiannya

Tanpa melakukan uji titik himpunan penyelesaian pertidaksamaan dapat dilihat dari gambar berikut dimana garis membagi bidang menjadi 2 bagian :

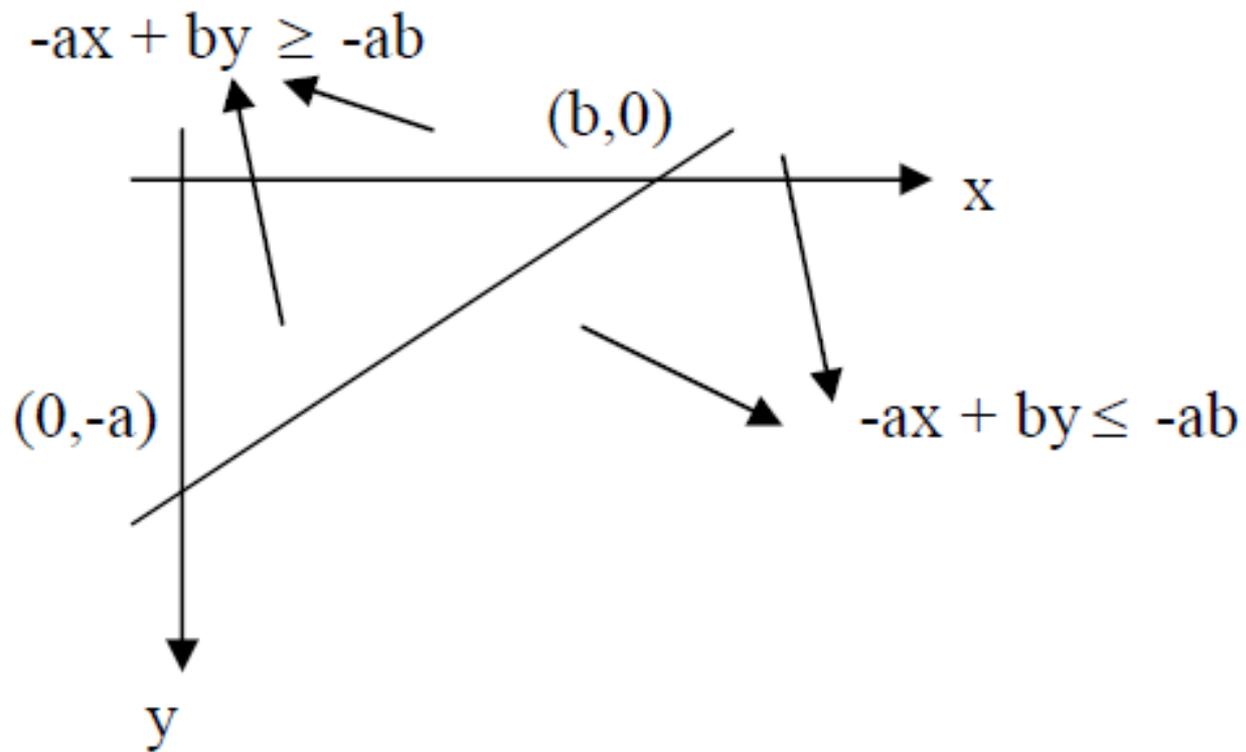
- untuk $a > 0$ dan $b > 0$



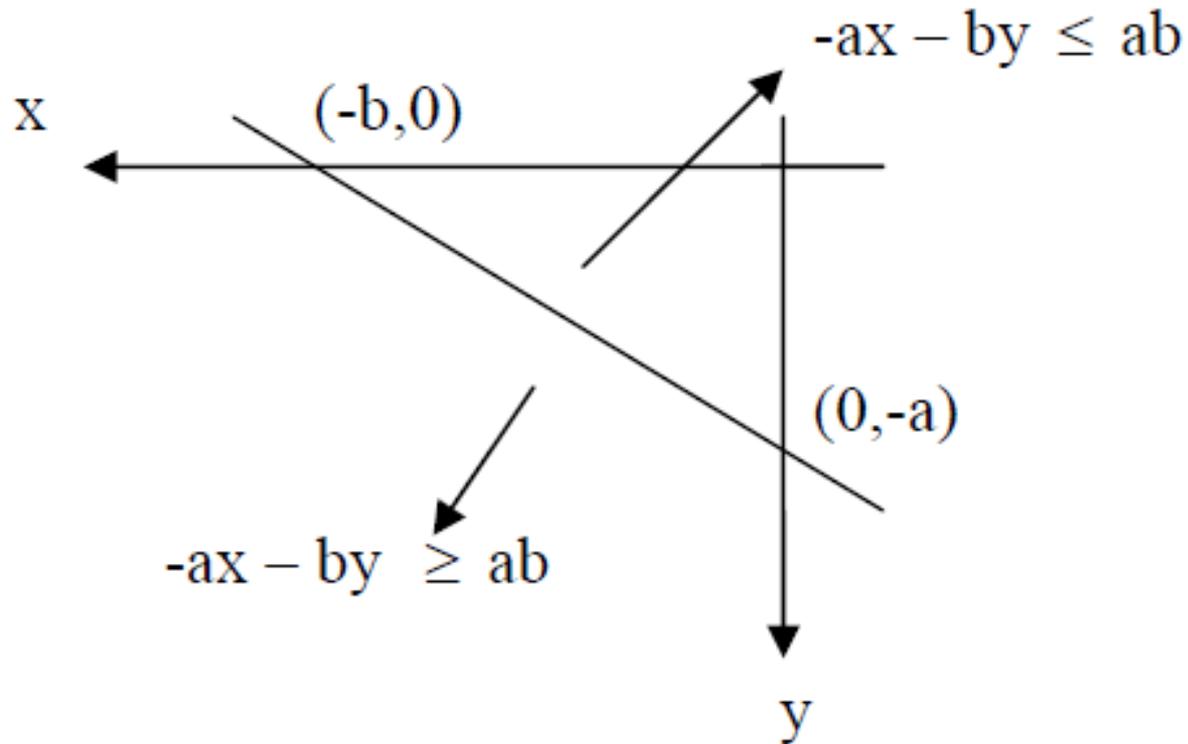
- untuk $a > 0$ dan $b < 0$



- Untuk $a < 0$ dan $b > 0$



- Untuk $a < 0$ dan $b < 0$



- Contoh:

Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari system pertidaksamaan:

$$2x + 3y \leq 6 ; 4x + 2y \leq 8 ; x \geq 0 ; y \geq 0$$

untuk x dan $y \in \mathbb{R}$

Jawab:

- Langkah 1:

gambar persamaan $2x + 3y \leq 6$

Buat garis $2x + 3y = 6$

titik potong dengan sb x jika $y = 0 \rightarrow 2x = 6$

$$x = 3$$

titik potong dengan sb y jika $x = 0 \rightarrow 3y = 6$

$$y = 2$$

didapat koordinat $(3,0)$ dan $(0,2)$

- Langkah 2 :

gambar persamaan $4x + 2y \leq 8$

Buat garis $4x + 2y = 8$

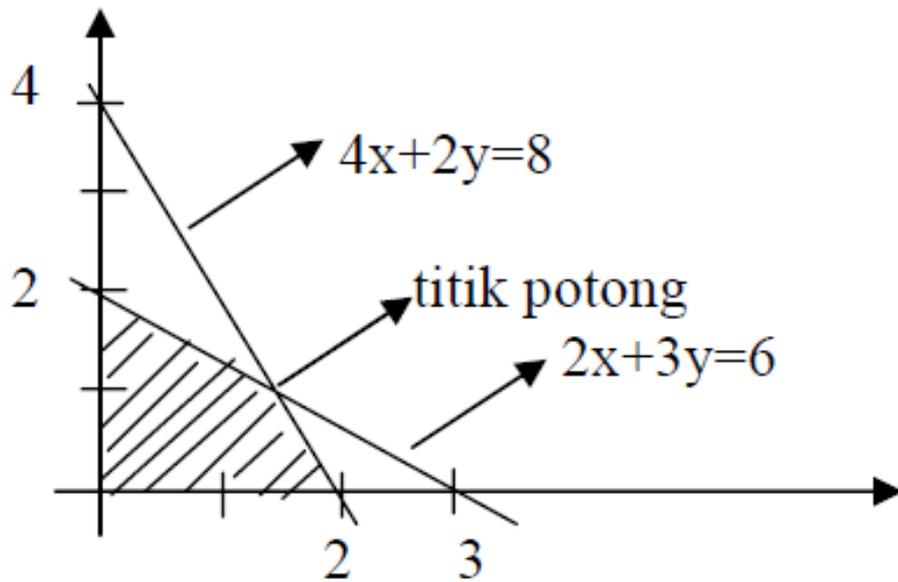
titik potong dengan sb x jika $y=0 \rightarrow 4x = 8$

$$x = 2$$

titik potong dengan sb y jika $x = 0 \rightarrow 2y = 8$

$$y = 4$$

didapat koordinat $(2,0)$ dan $(0,4)$



Daerah yang diarsir menunjukkan himpunan penyelesaian dari system pertidaksamaan linear.

- Untuk menentukan daerah himpunan penyelesaian, ujilah titik $(0,0)$. Titik $(0,0)$ memenuhi pertidaksamaan $2x + 3y \leq 6$; $4x + 2y \leq 8$; $x \geq 0$; $y \geq 0$, maka $(0,0)$ merupakan anggota himpunan penyelesaian.

- Tambahan:

Titik potong dua persamaan adalah:

Substitusikan persamaan 1 dan 2 :

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 6 \quad | \times 4 | \Rightarrow 8x + 12y = 24 \\ 4x + 2y = 8 \quad | \times 2 | \Rightarrow 8x + 4y = 16 \quad - \\ \hline 8y = 8 \\ y = 1 \end{array}$$

$$2x + 3y = 6$$

$$2x + 3 \cdot 1 = 6$$

$$x = 1 \frac{1}{2}$$

titik potongnya adalah $(1 \frac{1}{2}, 1)$

Nilai Optimum (Maksimum dan Minimum) dalam daerah penyelesaian

- Untuk menentukan nilai optimum dalam daerah penyelesaian, dapat ditentukan dengan menggunakan metode titik pojok (titik ekstrim) atau garis selidik.
- Contoh:

Jika diketahui system pertidaksamaan

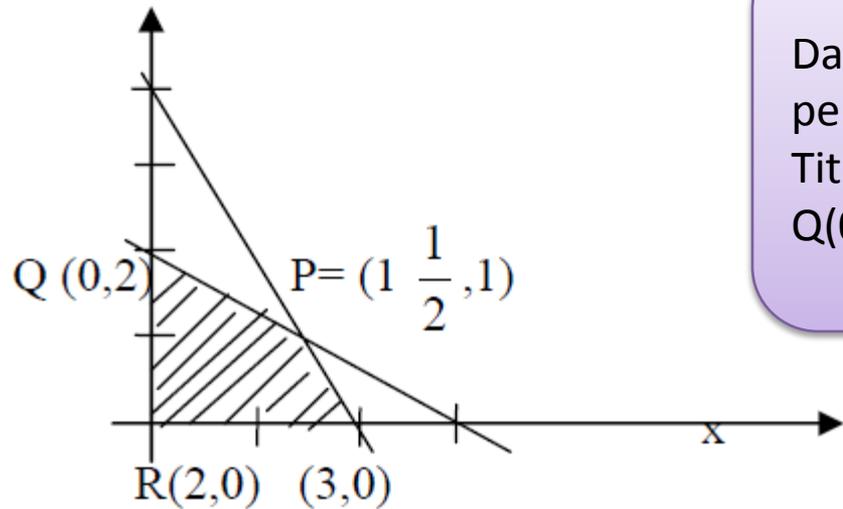
$$2x + 3y \leq 6 ; 4x + 2y \leq 8 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \text{ untuk } x \text{ dan } y \in \mathbb{R},$$

Tentukan nilai optimum untuk $A = x + 3y$ dan $B = 2x + 5y$

dimana $x, y \in \mathbb{R}$

Jawab:

y



Daerah yang diarsir merupakan himpunan penyelesaian dari system pertidaksamaan. Titik-titik ekstrimnya adalah $P(1 \frac{1}{2}, 1)$, $Q(0,2)$, $R(2,0)$ dan $O(0,0)$.

titik P merupakan titik potong garis

$$2x + 3y = 6 \quad | \times 4 | \Rightarrow 8x + 12y = 24$$

$$4x + 2y = 8 \quad | \times 2 | \Rightarrow 8x + 4y = 16 \quad -$$

$$\frac{8y = 8}{8y = 8}$$

$$y = 1$$



$$2x + 3y = 6$$

$$2x + 3 \cdot 1 = 6$$

$$x = 1 \frac{1}{2}$$

titik potongnya adalah titik P $(1 \frac{1}{2}, 1)$

Titik	O	P	Q	R
X	0	$1 \frac{1}{2}$	0	2
Y	0	1	2	0
$A=x+3y$	0	$4 \frac{1}{2}$	6	2
$B=2x+5y$	0	8	10	4

dari tabel dapat disimpulkan bahwa :

nilai maksimum dari A adalah 6 , minimum adalah 0

nilai maksimum dari B adalah 10, minimum adalah 0